Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

Osservazioni sull'insegnamento dell'analisi matematica con le moderne tecnologie. Esperienze in classe

Bruno Barigelli - G. Spinsante - Orlando Zega

Istituto DE.F.IN. - Facoltà Economia Università Politecnica delle Marche
barigelli@posta.econ.unian.it, spinsante@libero.it, o.zega@virgilio.it

Introduzione

Alcuni problemi di analisi matematica, connessi con lo studio e la rappresentazione delle funzioni, sono stati proposti e discussi in alcune classi del Liceo Scientifico Tecnologico con l'ausilio delle moderne tecnologie. L'esperienza segue quanto presentato in un precedente lavoro [1], in cui venivano esaminate le equazioni di II grado. In quell'occasione avevamo sperimentato e verificato come gli interessi degli allievi delle classi del biennio di un Liceo Scientifico fossero orientati ai nuovi modi di proporsi dell'insegnamento mediante l'utilizzo di software didattico, il Cabri II ed un linguaggio di programmazione, il Pascal. Le esperienze raccolte suggeriscono alcune utili considerazioni sull'insegnamento della matematica e sulla necessità di utilizzare strumenti di visualizzazione in quanto l'impostazione astratta tende a mettere una eccessiva distanza tra apprendimento e concretizzazione dei concetti. È noto come molti argomenti sono introdotti, di solito, con un rigoroso formalismo, spesso non appropriato al livello di formazione mentale degli studenti. L'esperienza ha riguardato il calcolo della derivata di una funzione come limite del rapporto incrementale; lo studio di alcune caratteristiche delle funzioni reali di variabile reale come il dominio, la rappresentazione tabulare relativa ad intervalli contenenti punti critici, il calcolo del limite e la rappresentazione grafica con variazioni di scala. I pacchetti utilizzati sono stati: Cabri II e Derive 5.

1 Cabri II

Con "Cabri II" abbiamo calcolato la derivata di una funzione sperimentale in un punto come limite del rapporto incrementale.
È chiaro che le costruzioni grafiche sono imperfette, ma hanno l'inestimabile pregio di "materializzare" e quindi di rendere evidenti i concetti e di offrire utilissimi controlli.
Individuati sul grafico i punti A, dove si vuole calcolare la derivata, C e B proiezione di C sulla parallela per A all'asse x, ai due segmenti AC ed AB,

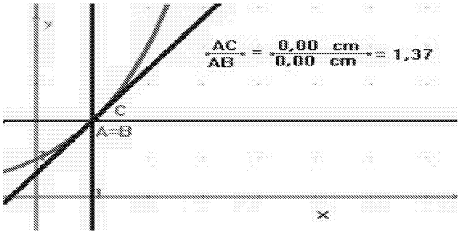

Figura 1: Grafico Cabri

è stata associata la relativa misura è quindi è stato assegnato un numero al rapporto AC/AB.
Inizialmente le misure ottenute sono state quelle definite nel pacchetto applicativo con due cifre decimali, e questo ha subito portato gli allievi a considerazioni approfondite scaturite dal fatto che quando il punto B, muovendosi sulla parallela all'asse x, si sovrapponeva al punto A e quindi anche il punto C al punto A, (v. Fig.1), sia il numeratore che il denominatore risultavano uguali a 0,00 mentre il rapporto era un numero diverso da zero. Impostata la misura dei segmenti con 8 cifre decimali il rapporto si appropriava di significato, poiché sia il numeratore che il denominatore risultavano diversi da zero, anche se i due punti non riuscivano a sovrapporsi (e ciò è dovuto al logico valore dei pixel ed ai limiti del software applicativo)

$$\frac{AC}{AB} = \frac{0,0024675068mm}{0,0017962107mm} = 1,3737290866$$

La parte che ha interessato maggiormente gli studenti è risultata quella che riguarda la possibilità di muovere le figure a cui segue, contestualmente, anche la variazione della misura dei segmenti. Di più, al variare dei segmenti varia anche la misura del rapporto degli stessi e ciò permette di ottenere il coefficiente angolare della retta tangente (quando esiste) in un punto e quindi il limite del rapporto incrementale.

2 Derive 5

Utilizzando il pacchetto Derive 5, abbiamo proposto la rappresentazione grafica di alcune funzioni fratte ed esaminato i problemi connessi.
Abbiamo considerato dapprima la funzione:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

È chiaro che il campo di esistenza è l'insieme costituito dall'insieme R dei numeri reali privato di $x = -1$.
Con Derive 5 abbiamo ottenuto la rappresentazione grafica riportata in

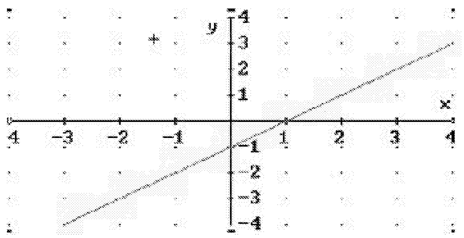

Figura 2: Grafico 1-Derive

Fig.2. Dal grafico si può dedurre che non è considerato il punto "critico" $x = -1$, cioè che, erroneamente, il dominio è tutto R.

Tabulando la funzione nell'intervallo $[-2, 1]$, con passo $0,5$, in corrispondenza del valore -1 appare un punto di domanda.

-2	-3
$-3/2$	$-5/2$
-1	?
$-1/2$	$-3/2$
0	-1
$1/2$	$-1/2$
1	0

Cambiando scala al fine di evidenziare l'andamento della funzione nell'intorno del punto critico, abbiamo ottenuto il grafico corretto e cioè una lacuna sulla retta in corrispondenza ad $x = -1$.
Abbiamo poi proposto la funzione:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

è chiaro che dallo studio di tale funzione emerge che il campo di esistenza è l'insieme $\{x \in R : 1 < x < +\infty\}$.
Con Derive 5 abbiamo ottenuto il grafico di Fig.3. Quindi anche il punto $x = 0$, a cui nel grafico corrisponde $y = 0$, dovrebbe essere incluso nel dominio della funzione.
Per analizzare la natura di questo punto e stabilire se considerare il punto $x = 0$ appartenente o meno, al campo di esistenza, abbiamo tabulato la funzione nell'intervallo $[-1, 5; 2, 5]$ con passo $0, 5$.

Abbiamo ottenuto: valori complessi della funzione per $-1, 5 = x < 0$ e $0 < x < 1$, il valore 0 in corrispondenza ad $x = 0$, dei valori "strani" in

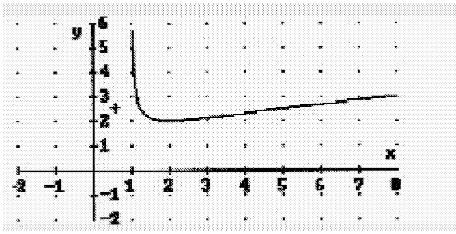

Figura 3: Grafico 2-Derive

corrispondenza di $x = 1$ e cioè $\infty\,(\pm 1)^{3/2}$ e valori reali per $x > 1$.

$$\begin{vmatrix} -1/2 & \sqrt{6}\cdot i/6 \\ 0 & 0 \\ 1/2 & -\sqrt{2}\cdot i/2 \\ 1 & \infty\,(\pm 1)^{3/2} \\ 3/2 & 3\sqrt{2}/2 \\ 2 & 2 \\ 5/2 & 5\sqrt{6}/6 \end{vmatrix}$$

Che cosa si può dedurre? Dopo approfondite discussioni è emerso che il valore 0 della funzione in corrispondenza ad $x = 0$, è il risultato della divisione del numero 0, considerato come numero complesso, per il numero complesso.
Passando all'analisi del comportamento della funzione nell'intorno del punto di ascissa 1, si è concluso che la retta $x = 1$ è un asintoto verticale.
Dalla rappresentazione tabulare si può ottenere la conferma del comportamento asintotico della funzione per $x \to 1^+$.

3 Conclusioni

Appare qui chiaramente come la tecnica oggi possa rivelarsi uno strumento sia relazionale sia didattico efficace allo scopo di perfezionare l'insegnamento e l'apprendimento complementariamente. L'apprendimento tramite le nuove tecnologie permette di tramutare lo studio faticoso, ripetitivo e solitario in studio creativo, mobile, interconnesso e a costi molto ridotti rispetto ai metodi convenzionali di acquisizione.
Simili modalit di insegnamento e di apprendimento stanno cambiando sia il rapporto tra insegnante e allievo sia il concetto stesso di educare, insegnare e formare professionalmente. Questa innovazione dell'operare conoscenza è di portata epocale ed oltre ai vantaggi di cui sopra abbiamo dato un esempio,

può celare il pericolo della globalizzazione nel senso di standardizzazione delle conoscenza su scala mondiale. Tuttavia, si può obiettare, colui il quale si pone alla consolle di un computer per imparare e conoscere sarà guidato dalla stessa curiosità, insita in ogni conoscenza, a cercare o proporre un sapere non omologato, una domanda di conoscere personale e ineliminabile anche quando il lavoro avviene in una "comunità virtuale" di apprendimento e ricerca. I dubbi circa un simile modo di far scuola sono paralleli allo stupore che la tecnica fa sorgere, perciò molti si chiedono se davvero sia preferibile interagire con un computer oppure con compagni e insegnanti.
L'obiezione può essere superata dal fatto che spesso a scuola la ricerca viene fatta in gruppo oppure da più compagni collegati tra loro, creando una specie di "comunità di apprendimento", con la raccomandazione che a guidare insegnate e allievo siano le medesime ragioni del cuore e della mente che nei secoli hanno costruito le tracce e poi i templi della civiltà umana.
E gli studenti hanno afferrato le potenzialità offerte dall'introduzione delle moderne tecnologie, nel nostro caso, Cabri II e Derive 5, nell'insegnamento della matematica. Oltre agli strumenti tradizionali quali la penna, la riga, il compasso, ora, gli studenti dispongono di nuove possibilità, quali ad esempio la funzione di trascinamento di Cabri II, la quale permette di muovere e trasformare le figure disegnate, mantenendone invariate però le proprietà geometriche. Nel problema considerato, con la funzione di trascinamento è stata fornita una giustificazione all'idea intuitiva di considerare segmenti i cui estremi tendono a sovrapporsi e di giustificare, geometricamente, una operazione come il passaggio al limite, suscitando allo stesso tempo, nuovi problemi connessi alla misura dei segmenti.
Per quanto riguarda il Derive 5, gli studenti ne hanno scoperto le potenzialità per determinare alcune proprietà delle funzioni e tracciarne i relativi grafici. Ricordiamo che gli studenti a cui ci rivolgiamo non hanno ancora ben fissati certi concetti rela-tivi allo studio delle funzioni. Tuttavia l'utilizzo di Derive 5 ha fornito, nei nostri esempi, tabelle di valori completamente diversi da quelli che ci si poteva aspettare e grafici addirittura "sbagliati", perchè le funzioni di libreria del Derive sono funzioni di variabile complessa ed a valori complessi ed il risultato che viene presentato restringendo all'asse reale tali funzioni può differire in modo sostanziale da quello che possiamo stabilire lavorando in ambito reale. È importante focalizzare l'attenzione degli studenti sulle ripercussioni che tali risultati "sbagliati" possono avere sul loro apprendimento. È ugualmente importante che gli studenti abbiano una sufficiente conoscenza dei numeri complessi in modo da poter correttamente classificare i diversi risultati che si ottengono seguendo la teoria da quelli che fornisce il computer ed individuare il problema nel fatto che lo studente e la macchina lavorano su due piani concettuali diversi. Da ciò emerge che introdurre Derive nelle scuole medie superiori richiede, da parte dell'insegnante, un'attenta valutazione dei pro e dei contro nell'utilizzo di tale pacchetto. Come risultato delle attività svolte nelle classi abbiamo sentito la necessità di sviluppare un programma in Pascal "ancora aperto" che

potesse dare risposte ad alcuni problemi, ma molto probabilmente a crearne altri.

Riferimenti bibliografici

[1] Barigelli B., Spinsante G., Zega O.
Un problema non pubblicato di C. Renaldini. Considerazioni didattiche.
Atti Congresso Nazionale Mathesis, pp.115-124, Mantova 2001